

Некоторые методы численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений.

Требуется определить сеточную функцию y_i отвечающую задаче:

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Метод Эйлера: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

Один из методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности

Расчеты проводятся в два этапа:

1 этап. Рассчитывается вспомогательное значение $(y_b)_i = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

2 этап. Переход в следующую точку $(y)_{i+1} = y_i + h \cdot 0.5 \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, (y_b)_i))$

Один из методов Рунге-Кутты 4-го порядка точности

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = (1/6) \cdot h \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$,

$k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + h/2, y_i + (h/2) \cdot k_1)$,

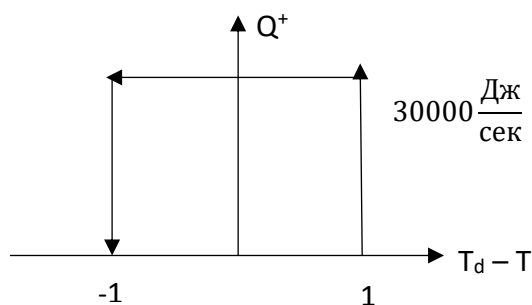
$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + (h/2) \cdot k_2)$, $k_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3)$,

Задача № K02

Система отопления некоторого объекта описывается уравнением

$$Q^+ - Q^- = 250 \, dT_0/dt,$$

где Q^+ - подвод тепла от нагревателя, Q^- - потери тепла в окружающую среду,
 T - температура объекта.



Объект оборудован датчиком, который включает и выключает нагреватели в зависимости от разницы температуры объекта T и заданной температуры T_d так, чтобы разница составляла не более одного градуса. Включение нагревателя соответствует графику, представленному на рисунке.

Пусть $Q^- = 500 \, T$, заданная температура $T_d = 20^\circ\text{C}$, а начальная температура объекта $T_0 = 10^\circ\text{C}$.

Методами математического моделирования исследовать систему отопления объекта на предмет эффективности системы.

Под эффективностью работы системы E будем понимать величину численно равную отношению времен

$$\bar{t} / (t^- + t^+),$$

где t^+ и t^- - время действия нагревателя и время отключения нагревателя, соответственно.

Имеем задачу Коши

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{250} * (Q^+ - Q^-), \quad T(0) = T_0$$

Простейшая схема -

$$T_{i+1} = T_i + \tau/250 * (Q^+ - Q^-) = T_i + \tau/250 * (Q^+ - 500 * T_i),$$

Программа для начального исследования –

```
// https://www.programiz.com/cpp-programming/online-compiler/
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
int main()
{
    double Td = 20, T0 = 10, k_p = 500, dT = 1.0, Qp = 30000.0;
    double T = T0, TT, Q=Qp;
    double time_mod = 0, time_finis= 600.0;
    double time_upr = 0;           // Время действия нагревателя
    double time_upr_neg = 0;       // Время отключения нагрева
    int num_print = 20, num_mod = 10000; // Кол-во печати, кол-во проходов по циклу
    double tay = (time_finis/(num_print*num_mod));
    cout<<" Время, "<<" T, "<<"      Время "<<"      Время отключения "<<"\n";
    cout<<" с "<<"      град. С "<<"      нагрева,с"<<"      нагрева,с"<<"\n";
    for (int k=0; k<num_print; k++){ // Цикл печати
        for (int i=0; i<num_mod; i++)
        {
            time_mod += tay;           // Моделируемое время
            if ((T<Td)) Q =Qp; else Q=0 ;
            TT  = T + tay*(Q - k_p*T)/250.0;
            if (Q > 0) time_upr += tay; else time_upr_neg += tay;
            T   = TT;
        }
        cout<<time_mod<<"      "<<" T<<"      "<<time_upr<<"      "<<time_upr_neg<<" \n";
    }
    double Eff;
    Eff = time_upr_neg / (time_upr_neg + time_upr );
    cout <<" \n "<<"      Eff = "<<Eff <<"      tay = "<<tay<<"\n "; // Эффективность
    return 0;
}}
```

Время, Т, с	град. С	Время нагрева,с	Время отключения нагрева,с
30	19.8817	10.083	19.917
60	20.0147	20.094	39.906
90	20.2358	30.105	59.895
120	20.0015	40.113	79.887
150	20.1342	50.124	99.876
180	19.9857	60.132	119.868
210	20.1221	70.143	139.857
240	19.8923	80.151	159.849
270	20.0972	90.162	179.838
300	19.8813	100.17	199.83
330	20.0113	110.181	219.819
360	20.21	120.192	239.808
390	20.0011	130.2	259.8
420	20.1311	140.211	279.789
450	19.9621	150.219	299.781
480	20.1217	160.23	319.77
510	19.8895	170.238	339.762
540	20.0754	180.249	359.751
570	19.8809	190.257	379.743
600	20.0087	200.268	399.732

Eff = 0.66582 tay = 0.006 N = 100000

Программа для исследования эффективности работы нагревателя в зависимости от точности удерживаемой температуры и времени моделирования процесса.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
int main()
{
    double Td = 20, T0 = 10, k_p = 500, dT = 0.5, Qp = 30000.0;
    double T = T0, TT, Q=Qp;
    double time_mod = 0, time_finis= 600.0;
    double time_upr = 0;           // Время действия нагревателя
    double time_upr_neg =0;       // Время отключения нагрева
    int num_print = 20;           // Кол-во печати
    double tay = 2*dT*250/(Qp-500*Td);
    int num_mod = (int) (time_finis/tay);
    cout<<" Время, "<<" Т, "<<"      Время "<<"      Время отключения "<<"\n";
    cout<<" с "<<"      град. С "<<"      нагрева,с"<<"      нагрева,с"<<"\n";
    int num_mod_pr = (int)(1.0*num_mod/num_print);
    for (int k=0; k<num_print; k++){ // Цикл печати
        for (int i=0; i<num_mod_pr; i++)
        {
            time_mod += tay;           // Моделируемое время
            if ((T<Td)) Q =Qp; else Q=0 ;
            TT  = T + tay*(Q - k_p*T)/250.0;
            if (Q > 0) time_upr += tay; else time_upr_neg += tay;
            T  = TT;
        }
        cout<<time_mod<<"      "<<T<<"      "<<time_upr<<"      "<<time_upr_neg<<"\n ";
    }
}
```

```

    }
    double Eff;
    Eff = time_upr_neg / (time_upr_neg + time_upr );
    cout << "\n" << "    Eff = " << Eff << "    tay = " << tay << "    N = " << num_mod << " \n ";    //
Эффективность
    return 0;
}

```

Время, Т, с	Т, град. С	Время нагрева,с	Время отключения нагрева,с
30	20.0114	10.125	19.875
60	19.6242	20.175	39.825
90	19.5042	30.225	59.775
120	20.5766	40.2875	79.7125
150	20.5129	50.3375	99.6625
180	20.0319	60.3875	119.613
210	19.7919	70.4375	139.563
240	19.5151	80.4875	159.512
270	20.6657	90.55	179.45
300	20.5186	100.6	199.4
330	20.0792	110.65	219.35
360	20.0011	120.7	239.3
390	19.5402	130.75	259.25
420	20.871	140.813	279.187
450	20.532	150.862	299.137
480	20.1883	160.912	319.087
510	20.0082	170.962	339.037
540	19.5981	181.012	358.987
570	19.5025	191.062	378.937
600	20.5627	201.125	398.875

Eff = 0.664792 tay = 0.0125 N = 48000

Для задачи Коши

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{250} * (Q^+ - Q^-), \quad T(0) = T_0$$

используем схему второго порядка точности с введением дополнительной сеточной функции Td_i

$$Td_i = T_i + \tau/250 * (Q^+ - Q^-) = T_i + \tau/250 * (Q^+ - 500 * T_i),$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{\tau}{250} * 0.5 * ((Q^+ - 500 * T_i) + (Q^+ - 500 * Td_i)) \quad ,$$

Программа для исследования эффективности работы нагревателя в зависимости от точности удерживаемой температуры и времени моделирования процесса.

```

#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
int main()
{
    double Td = 20, T0 = 10, k_p = 500, dT = 0.5, Qp = 30000.0;
    double T = T0, TT, Q=Qp, Tb;
    double time_mod = 0, time_finis= 600.0;

```

```

double time_upr = 0;           // Время действия нагревателя
double time_upr_neg = 0;      // Время отключения нагрева
int num_print = 20;           // Кол-во печати
double tay = 2*dT*250/(Qp-500*Td);
int num_mod = (int) (time_finis/tay); // Кол-во проходов по циклу
cout<<" Время, "<<" T, "<<"      Время "<<"      Время отключения "<<"\n";
cout<<" с "<<"      град. С "<<"      нагрева,с"<<"      нагрева,с"<<"\n";
int num_mod_pr = (int)(1.0*num_mod/num_print);
for (int k=0; k<num_print; k++){ // Цикл печати
    for (int i=0; i<num_mod_pr; i++)
        { time_mod += tay;           // Моделируемое время
          if ((T<Td)) Q = Qp; else Q=0 ;
          Tb  = T + tay*(Q - k_p*T)/250.0;
          TT  = T + (tay/250)*0.5*((Q - k_p*T)+ (Q - k_p*Tb) );
          if (Q > 0) time_upr += tay; else time_upr_neg += tay;
          T    = TT;
        }
    cout<<time_mod<<"      "<<" T<<"      "<<time_upr<<"      "<<time_upr_neg<<" \n ";
}
double Eff;
Eff = time_upr_neg / (time_upr_neg + time_upr );
cout <<" \n "<<"      " Eff = "<<Eff <<"      tay = "<<tay<<"      N = "<<num_mod<<" \n ";
// Эффективность
return 0;
}

```

Время, с	T, град. С	Время нагрева,с	Время отключения нагрева,с
30	20.0109	10.125	19.875
60	19.8195	20.175	39.825
90	19.5546	30.225	59.775
120	19.5109	40.275	79.725
150	20.685	50.3375	99.6625
180	20.5322	60.3875	119.613
210	20.507	70.4375	139.563
240	20.1015	80.4875	159.512
270	20.0133	90.5375	179.462
300	19.8708	100.588	199.412
330	19.5631	110.638	219.362
360	19.5123	120.688	239.312
390	20.7147	130.75	259.25
420	20.5371	140.8	279.2
450	20.5078	150.85	299.15
480	20.1185	160.9	319.1
510	20.0161	170.95	339.05
540	19.9304	181	359
570	19.573	191.05	378.95
600	19.5139	201.1	398.9

Eff = 0.664833 tay = 0.0125 N = 48000

Для задачи Коши

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{250} * (Q^+ - Q^-), \quad T(0) = T_0$$

используем схему четвертого порядка точности с введением дополнительных функций k_1 , k_2 , k_3 , k_4 .

Решение строится на основе схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности-

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + (1/6) \cdot \tau \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(t_i, T_i), & k_2 &= f(t_i + \tau/2, T_i + (\tau/2) \cdot k_1), \\ k_3 &= f(t_i + \tau/2, T_i + (\tau/2) \cdot k_2), & k_4 &= f(t_i + \tau, T_i + \tau \cdot k_3), \end{aligned}$$

Для данной задачи, имеем

$$\begin{aligned} k_1 &= (Q^+ - 500 \cdot T_i) / 250 \\ k_2 &= (Q^+ - 500 \cdot (T_i + 0.5 \cdot \tau \cdot k_1)) / 250 \\ k_3 &= (Q^+ - 500 \cdot (T_i + 0.5 \cdot \tau \cdot k_2)) / 250 \\ k_4 &= (Q^+ - 500 \cdot (T_i + \tau \cdot k_3)) / 250 \\ T_{i+1} &= T_i + (1/6) \cdot (\tau) \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4), \end{aligned}$$

Программа для исследования эффективности работы нагревателя в зависимости от точности удерживаемой температуры и времени моделирования процесса.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
int main()
{
    double Td = 20, T0 = 10, k_p = 500, dT = 0.5, Qp = 30000.0;
    double T = T0, TT, Q=Qp;
    double k1,k2,k3,k4;
    double time_mod = 0, time_finis= 600.0;
    double time_upr = 0;           // Время действия нагревателя
    double time_upr_neg =0;        // Время отключения нагрева
    int num_print = 20; //, num_mod = 100000;    // Кол-во печати,
    double tay = 2*dT*250/(Qp-500*Td);
    int num_mod = (int) (time_finis/tay); // Кол-во проходов по циклу
    cout<<" Время, "<<" T, "<<"      Время "<<"      Время отключения "<<"\n";
    cout<<" с "<<"      град. С "<<"      нагрева,с"<<"      нагрева,с"<<"\n";
    int num_mod_pr = (int)(1.0*num_mod/num_print);
    for (int k=0; k<num_print; k++){ // Цикл печати
        for (int i=0; i<num_mod_pr; i++)
        {
            time_mod += tay;           // Моделируемое время
            if ((T<Td)) Q =Qp; else Q=0 ;
            k1 = (Q - k_p*T)/250.0;
            k2 = (Q - k_p*(T+0.5*tay*k1))/250.0;
            k3 = (Q - k_p*(T+0.5*tay*k2))/250.0;
            k4 = (Q - k_p*(T+tay*k3))/250.0;
            TT = T + ((tay)/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4 );
            if (Q > 0) time_upr += tay; else time_upr_neg += tay;
            T = TT;
        }
        cout<<time_mod<<"      "<<" T<<"      "<<time_upr<<"      "<<time_upr_neg<<" \n ";
    }
}
```

```

double Eff;
Eff = time_upr_neg / (time_upr_neg + time_upr );
cout << "\n " << " Eff = " << Eff << "   tay = " << tay << "   N = " << num_mod << " \n ";
// Эффективность
return 0;
}

```

Время, Т, с	Т, град. С	Время нагрева,с	Время отключения нагрева,с
30	20.012	10.125	19.875
60	19.8441	20.175	39.825
90	19.5587	30.225	59.775
120	19.5115	40.275	79.725
150	20.6993	50.3375	99.6625
180	20.5346	60.3875	119.613
210	20.5074	70.4375	139.563
240	20.1097	80.4875	159.512
270	20.0147	90.5375	179.462
300	19.8995	100.588	199.412
330	19.5678	110.638	219.362
360	19.513	120.688	239.312
390	20.7313	130.75	259.25
420	20.5399	140.8	279.2
450	20.5083	150.85	299.15
480	20.1281	160.9	319.1
510	20.0177	170.95	339.05
540	19.9638	181	359
570	19.5784	191.05	378.95
600	19.5147	201.1	398.9

Eff = 0.664833 tay = 0.0125 N = 48000